Μάθημα 5ο 12/3/2018

Κλασσική Μηχανική

Βασικές επαναληπτικές έννοιες

Στη κλασσική μηχανική χρησιμοποιούμε τα παρακάτω μεγέθη

1) Βαθμωτά μεγέθη, δηλ μεγέθη που περιγράφονται από μια μόνο τιμή (π.χ μάζα, θερμοκρασία, ...)

2) Διανυσματικά μεγέθη είναι μεγέθη που περιγράφονται από ένα μέτρο και μια κατεύθυνση (δηλ διεύθυνση και φορά)

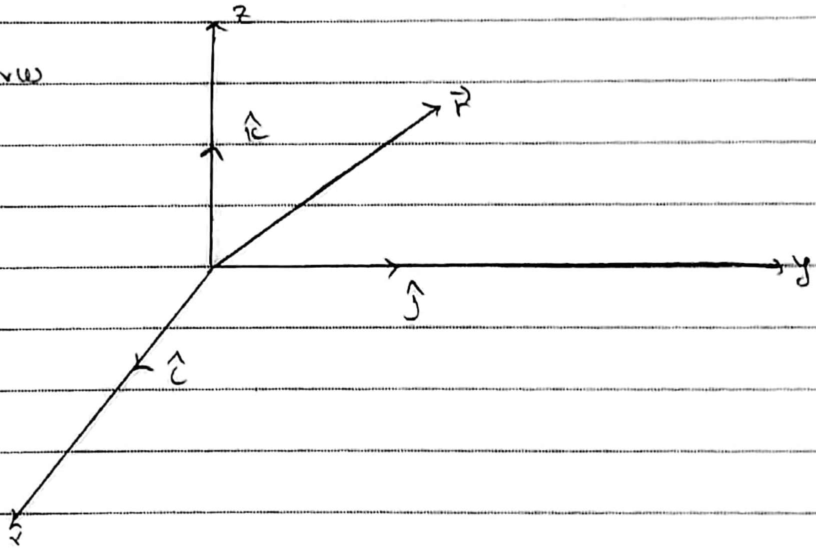
3) Τανυστικά μεγέθη, ποσότητες ή άτομα και σταθερές (χρησιμοποιούνται στη θεωρία της σχετικότητας)

• Τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ περιγράφονται από 3 συνιστώσες

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ με μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

που έχω "^" πάνω σημαίνει ότι είναι μοναδιαία



μέτρο του $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

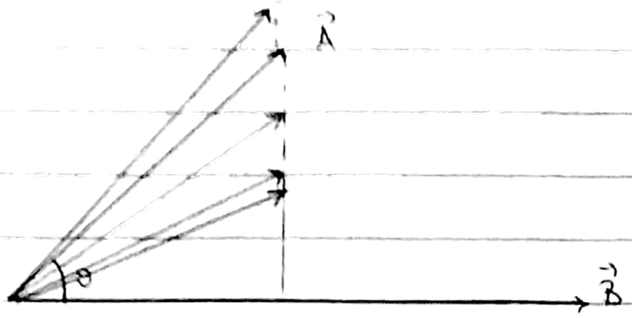
• Στα διανύσματα πέρα από τις στοιχειώδεις πράξεις θα χρησιμοποιούμε δύο έννοιες

1) Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο

$\vec{A}, \vec{B}$ με $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

τότε $\vec{A}\vec{B} = |A|\,|B|\cos(\hat{\vec{A},\vec{B}}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



→ Είναι κακή πράξη γιατί με πηγαίνει από διάνυσμα σε αριθμό και επίσης χάνω πληροφορίες

- $\vec{A}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

2) Εξωτερικό γινόμενο ή διανυσματικό

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{C}$$

(μου δίνει ένα διάνυσμα)

ανάπτυξη ως προς την 1η σειρά πάντα

Το $\vec{C}$ θα είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{A}, \vec{B}$

⊛ Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ένα τελεστή τον ανάδελτα $\vec{\nabla}$ που ορίζεται ως εξής

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Βάσει αυτού ορίζω την ① κλίση (gradient):

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

② την απόκλιση (divergence)

$$\operatorname{div}\vec{f} = \vec{\nabla}\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\vec{F} = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k}$$

③ τον στροβιλισμό (curl) το πόσο γρήγορα στροβιλίζει, διαν. δίνης

$$\vec{\nabla}\times\vec{f} = \operatorname{curl}\vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Διανυσματικά πεδία

Όταν κινούμαστε στο χώρο χρησιμοποιούμε αναγκαστικά μεγέθη διανυσματικά για την περιγραφή φυσικών φαινομένων.
Πάν ορίσουμε την κίνηση πρέπει να έχουμε την αίσθηση της κατεύθυνσης (δηλ προς τα που θέλω να πάω)

Ορισμός

Διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του χώρου ή του επιπέδου είναι η συνάρτηση που αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο της περιοχής αυτής και γράφουμε

$\vec{F} = f_1(x,y,z)\hat{i} + f_2(x,y,z)\hat{j} + f_3(x,y,z)\hat{k}$ στον $\mathbb{R}^3$ (χώρος)

ή $\vec{F} = f_1(x,y)\hat{i} + f_2(x,y)\hat{j}$ στον $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο)

Το πεδίο καλείται συνεχές αν οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 είναι συνεχείς και παραγωγίσιμο αν οι f_1, f_2, f_3 παραγωγίσιμες

Παραδειγμα 1:

Το βαρυτικο πεδιο της γης

$$\vec{F} = GM \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

⊛ Για μια διαφορισιμη συναρτηση μπορουμε να ορισουμε ενα διανυσματικο πεδιο

Ορισμος

Το πεδιο κλισης μιας διαφορισιμης συναρτησης $f=f(x,y,z)$ ειναι το πεδιο των διανυσματων κλισεως, δηλ.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Ετσι αν για παραδειγμα $f = xyz$ τοτε

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = (yz)\hat{i} + (xz)\hat{j} + (xy)\hat{k}$$

⊛ Σε καθε σημειο της τροχιας ενος σωματος αντιστοιχουμε το διανυσμα της ταχυτητας του που αντιστοιχει σ' ενα διανυσματικο πεδιο. Επισης κινηση μπορει να υπαρξει λογω της υπαρξης του πεδιου στο χωρο

Κινηση υλικου σημειου

Οταν ενα σωματιδιο κινειται στο χωρο κατα τη διαρκεια ενος χρονικου διαστηματος θεωρουμε τις συντεταγμενες του συναρτησει του χρονου. Δηλαδη

$$(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$$

Τα σημεια x, y, z αποτελουν μια καμπυλη στο χωρο που καλειται τροχια του σωματιδιου. Το διανυσμα $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ με αρχικη θεση την αρχη των αξονων και τελικη τη θεση του σωματιδιου καλειται διανυσμα θεσης

• Παραγωγος διανυσματος θεσης

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial x}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{i}$$

οριζει το διανυσμα ταχυτητας του σωματιδιου και ειναι εφαπτομενο στη καμπυλη τροχιας.

Η δευτερη παραγωγος ειναι το διανυσμα επιταχυνσης

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\hat{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\hat{i} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{i}$$

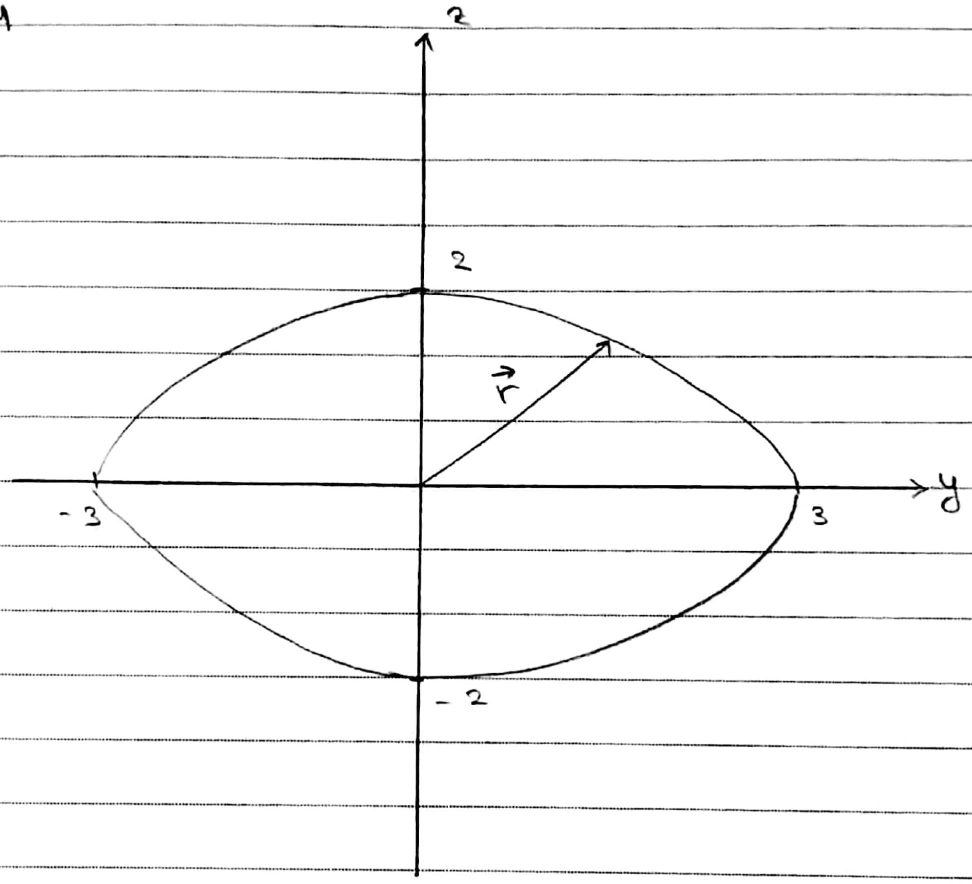
! Αρχη απροσδιοριστιας δε μπορω να μελετησω ταυτοχρονα την θεση και την ταχυτητα

• Οριζουμε ενα μοναδιαιο διανυσμα $\hat{r} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ που καθοριζει τη κατευθυνση τη φορα της κινησης.
Δηλαδη η ταχυτητα πλεον θα ειναι η εξης $\vec{v} = |\vec{v}|\,\hat{r}$

παραδειγμα

Εστω ενα σωματιδιο που κινειται στην ελλειπτικη τροχια $\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$ στο επιπεδο yz. Να βρεθει η θεση του οταν εχει μεγιστη ταχυτητα και μεγιστη επιταχυνση

απαντηση



οταν $z=0$: $y=\pm 3$

οταν $y=0$: $z=\pm 2$

Θα πρεπει να ορισαμε με καποιο τροπο το διανυσμα θεσης $\vec{r}$

Το $\vec{r}$ θα ειναι της μορφης

$$\vec{r} = y\hat{j} + z\hat{k}$$

Κινουμαι σε τροχια που καλυπτει και το εσωτερικο της ελλειψης

$$\vec{r} = \overbrace{y}\hat{j} + \overbrace{z}\hat{k} = \underbrace{(3\cos t)}_{}\,\hat{j} + (2\sin t)\,\hat{k} \quad , \; 0 \le t \le 2\pi$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\cos t}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sin t}{2}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

αρα ικανοποιειται η εξ. ελλειψης και για να την καλυψω ολοκληρη εχω $0 \le t \le 2\pi$

αρα διανυσμα ταχυτητας

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t\,\hat{j} + 2\cos t\,\hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}$$

διανυσμα επιταχυνσης

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -3\cos t\,\hat{j} - 2\sin t\,\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t}$$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Που εχω μεγαλυτερη ταχυτητα;

οταν μεγιστοποιειται το μετρο της ταχυτητας

$$|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{9\sin^2 t + 4(1-\sin^2 t)} = \sqrt{9\sin^2 t + 4 - 4\sin^2 t} =$$
$$= \sqrt{5\sin^2 t + 4}$$

γνωριζω οτι το sin ειναι μεγιστο στο $\pi/2$

ριζα ως συναρτηση αυξουσα και για αυτο μπορω

να πω οτι το sin παιρνει μεγαλυτερη τιμη στο $\pi/2$

οποτε $\max\{|\vec{v}|\}$ για $t = \pi/2$ η $t = 3\pi/2$

(μια συναρτηση μιας μεταβλητης και ζηταω max)

Άσκηση

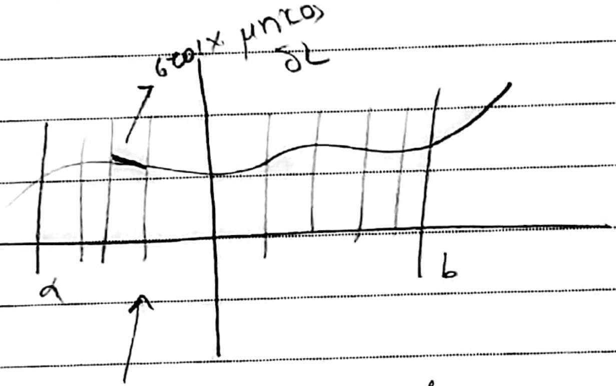
Να δείξετε ότι αν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα για κάθε χρόνο τότε το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (έχω δηλ. σταθ. μέτρο ταχύτητας)

⊕ Με βάση τα φυσικά μεγέθη που μάθαμε μπορούμε να βρούμε κι' άλλα χαρακτηριστικά της κίνησης

Δηλαδή το μήκος της διαδρομής που διανύθηκε

Το μήκος μιας λείας καμπύλης $\vec{r} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$ είναι:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt = \int_{a}^{b} |\vec{v}|\, dt$$



θέλω το μήκος αυτό, διαμερίζω

Σκεπτικό

Το στοιχειώδες μήκος $\delta L = |\vec{v}|\,\delta t$ (η ταχύτητα δεν έχει προλάβει να αλλάξει)

ολοκληρώνω

$$L = \int |\vec{v}|\, dt$$

γνωριζουμε οτι $|\vec{v}| = ds/dt$

Επισης μπορω να ορισω μοναδιαιο εφαπτομενο διανυσμα.

Το μοναδιαιο εφαπτομενο διανυσμα της διαφορισιμης καμπυλης $\bar{r} = r(t)$ ειναι $\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Καμπυλοτητα

Η καμπυλοτητα της λειας καμπυλης $r(t)$ ειναι

$$k = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|$$

Ο τροπος που μεταβαλλεται το μηκος μιας καμπυλης με το χρονο καλειται προσημασμενη αποσταση

$S = S(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}|\, dt$ ή παραμετρος τοξου